الجبر

الوحدة الثانية

الملخص

إعداد الأستاذ

حسن ممدوح

Scan me

01069781609

01287882728

01226183298

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

* الصورة الجبرية للعدد المركب *

ع = س + ت ص

س: حقيقي ، ص: تخيلي

(١) تساوي عددين مركبين:

اذا كان ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

فإن ع$_1$ = ع$_2$ عندما س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$

(٢) جمع وطرح عددين مركبين

ع$_1$ + ع$_2$ = س$_1$ + س$_2$ + (ص$_1$ + ص$_2$) ت

(٣) ضرب عددين مركبين

ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

ع$_1$ × ع$_2$ = الأول × الأول + الأولى في الثاني + الثاني في الأول + الثاني في الثاني

تذكر أن

* (أ ± ب)^2 = أ^2 ± ٢ أ ب + ب^2
* (أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2

* مرافق العدد المركب *

اذا كان $ع = س + ت ص$ عدد مركب فان $\bar{ع}$ هو مرافق العدد المركب حيث $\bar{ع} = س + ت ص$

ملحوظة

(١) $ع + \bar{ع} = (س + ت ص) + (س - ت ص) = ٢ س \in ح$

(٢) $ع \times \bar{ع} = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^٢ + ص^٢ \in ح$

---

* قسمة عددين مركبين *

لأى عددين مركبين $ع_١$ ، $ع_٢$ حيث $ع_٢ \neq ٠$ يكون $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ع_١ \bar{ع_٢}}{ع_٢ \bar{ع_٢}}$

اى ان: لايجاد خارج قسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق $ع_٢$ اى في $\bar{ع_٢}$

---

* الصورة المثلثية للعدد المركب *

اذا كان $ع = س + ت ص$ عدد مركب

* مقياس العدد المركب $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

* سعة العدد المركب: هي قياس الزاوية المحصورة بينه وبين الاتجاه الموجب لمحور السينات

حيث: $جتا \theta = \frac{س}{ل}$ ، $جا \theta = \frac{ص}{ل}$

" مع تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية "

ملحوظة: السعة لا تكون حقيقية اذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi]$

٢	١
$180^{\circ} - \theta$	θ
$90^{\circ} + \theta$	$90^{\circ} - \theta$
٣	**٤**
$-180^{\circ} + \theta$	$-\theta$
$-90^{\circ} - \theta$	$-90^{\circ} + \theta$

* الصورة المثلثية للعدد ع *

ع = س + ت ص ، س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

ع = ل جتا θ + ت ل جا θ

ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

ملاحظات:

(١) اذا كان س > 0 ، ص $= 0$ فإن $\theta = 0$

(٢) اذا كان س < 0 ، ص $= 0$ فإن $\theta = \pi$

(٣) اذا كان س $= 0$ ، ص > 0 فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$

(٤) اذا كان س $= 0$ ، ص < 0 فإن $\theta = -\frac{\pi}{2}$

ملحوظة

* العدد (١) : جتا ٠ + ت جا ٠
* العدد (-١) : جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠
* العدد (ت) : جتا ٩٠ + ت جا ٩٠
* العدد (- ت) : جتا -٩٠ + ت جا -٩٠

← العدد	$ع$	$-ع$	$\bar{ع}$	$\frac{1}{ع}$	$\frac{1}{\bar{ع}}$
← المقياس	$ل$	$ل$	$ل$	$\frac{1}{ل}$	$\frac{1}{ل}$
← السعة	θ	$180 \pm \theta$	$-\theta$	$-\theta$	θ

* طريقة كتابة العدد المركب على الصورة المثلثية الصحيحة *

- نحدد الربع حسب الإشارة التي أمام الدوال المثلثية بالجزئين الحقيقي والتخيلي
- يجب التأكد من وجود جيب التمام بالجزء الحقيقي ودالة الجيب بالجزء التخيلي
- في حالة وجود دالة الجيب بالجزء الحقيقي ودالة جيب التمام بالجزء التخيلي

في النهاية يجب أن تكون الصورة المثلثية ⇐ $ع = ل\,(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

إذا كان $ع_1 = ل_1\,(\text{جتا}\,\theta_1 + ت\,\text{جا}\,\theta_1)$ ، $ع_2 = ل_2\,(\text{جتا}\,\theta_2 + ت\,\text{جا}\,\theta_2)$

(الضرب) (القسمة)

* $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2\,(\text{جتا}(\theta_1+\theta_2) + ت\,\text{جا}(\theta_1+\theta_2))$
* $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}\,(\text{جتا}(\theta_1-\theta_2) + ت\,\text{جا}(\theta_1-\theta_2))$

ملحوظة : يجب التأكد من أن العددين على الصورة المثلثية الصحيحة

خد بالك

(١) اذا كان $ع = \frac{س + ت ص}{س - ت ص}$ فإن $|ع| = ١$ حيث ان البسط مرافق المقام

(٢) اذا كان ع عدد مركب سعته θ فإن العدد (ت ع) هو صورة العدد (ع) بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٩٠°

حيث $|ت ع| = |ع|$ وسعته (ت ع) $= ٩٠ + \theta$

الصورة الاسية للعدد المركب صورة اويلر

اذا كان العدد المركب $ع = س + ت ص = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$

فإن الصورة الاسية $ع = ل ه^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{س}{١٨٠} \longrightarrow \theta^{د} = \frac{س \times \pi}{١٨٠}$$

ضرب وقسمة الاعداد المركبة باستخدام الصورة الاسية

$ع_١ = ل_١ ه^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ ه^{\theta_٢ ت}$

(١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ ه^{(\theta_١ + \theta_٢) ت}$

(٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} ه^{(\theta_١ - \theta_٢) ت}$

ملحوظة: لاى عدد $ع = ل ه^{\theta ت}$ يكون $ع^ن = ل^ن ه^{ن \theta ت}$ حيث $ن \in ص$

نظرية ديموافر

(١) بأس صحيح موجب :

اذا كان ن عدد صحيح موجب فإن $\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}(\text{جتا ن}\theta + \text{ت جا ن}\theta)$

(٢) بأس نسبي موجب :

اذا كان ن عدد صحيح موجب ، θ مقاسة بالتقدير الستيني فإن

$$\text{ع}^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ل}^{\frac{1}{\text{ن}}}\left(\text{جتا}\left(\frac{\theta + 360\text{ر}}{\text{ن}}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta + 360\text{ر}}{\text{ن}}\right)\right)$$

لكل : $\text{ر} = 0 ، 1 ، 2 ، \ldots (\text{ن} - 1)$

إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب بالطريقة المثلثية

اذا كان $\text{ع} = \text{ل}(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)$ فإن الجذرين التربيعيين :

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \left[\text{ل}(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{ل}}\left[\text{جتا}\left(\frac{\theta + 360\text{ر}}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta + 360\text{ر}}{2}\right)\right]$$

عند $\text{ر} = 0 \Leftarrow \text{ع}_1 = \sqrt{\text{ل}}\left(\text{جتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}\right)$

عند $\text{ر} = 1 \Leftarrow \text{ع}_2 = \sqrt{\text{ل}}\left[\text{جتا}\left(\frac{\theta}{2} + 180\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta}{2} + 180\right)\right]$

* اذا كان ع على الصورة الجبرية $\text{ع} = \text{أ} + \text{ب ت}$ *

(١) نفرض $\text{س} + \text{ت ص} = (\text{أ} + \text{ب ت})^{\frac{1}{2}}$

(٢) بتربيع الطرفين $\Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{س ص ت} - \text{ص}^2 = \text{أ} + \text{ب ت}$

(٣) نساوي الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = \text{أ}$ ، التخيلي بالتخيلي $2\text{س ص} = \text{ب}$

(٤) نحل المعادلتين معاً ونحصل على قيمة س ، ص

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

* الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد الصحيح هي

١ ، $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

* نرمز لأحد الجذرين المترافقين بـ ω والآخر ω^2

*** ثلاثة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي: ١ ، ω ، ω^2**

(خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

(١) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تمثل بدائرة وحدة وسعتها هي
صفر° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ومقياسها = ١

(٢) $١ + \omega + \omega^2 =$ صفر

$\omega + \omega^2 = -١$ ، $١ + \omega = -\omega^2$ ، $١ + \omega^2 = -\omega$

(٣) $\omega \times \omega^2 = ١ = \omega^3$

(٤) $\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{٣}$ ت

ملاحظة

إذا كان ع = أ + بω فإن $\bar{\text{ع}}$ = أ + بω^2 حيث أ $\in$ ح ، ب $\in$ ح

* تعويد للتبسيط العام *

أ + أω = −أω^2 ، أ + أω^2 = −أω ، أω + أω^2 = −أ